



Arithmétique et dénombrement



Structure de
formation
Faculté des
Sciences

Présentation

Description

Cette UE vise à présenter les concepts élémentaires d'arithmétique et de dénombrement utiles pour le début de la licence en mathématiques.

Objectifs

Dénombrement élémentaire

- Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal et opérations ensemblistes. Cardinal et applications injectives, surjectives, bijectives. Cardinal d'un ensemble d'applications. Nombre de parties d'un ensemble. Fonction indicatrice.
- Introduction aux cardinaux infinis. Bijection entre ensembles. Dénombrabilité. Argument diagonal de Cantor. X et $P(X)$ n'ont pas le même cardinal. \mathbf{R} est indénombrable.
- Arrangements, permutations, combinaisons (coefficients binomiaux), triangle de Pascal, formule du binôme.
- Formule du crible générale (application au dénombrement des dérangements, des surjections, etc.).
- Relation binaire sur un ensemble. Relation d'équivalence, partition en classes d'équivalence, quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence (exemples sur des ensembles déjà connus). Relation d'ordre, partiel, total, exemples.
- Applications à des exemples de probabilités élémentaires finies (nombre de cas favorables/nombre de cas total)

Arithmétique élémentaire dans \mathbf{Z}

- Nombres entiers, écriture dans une base.
- Divisibilité, nombres premiers (infinitude, algorithme du crible). Division euclidienne (algorithme d'Euclide).
- PGCD et PPCM. Théorème de Bézout (et algorithme d'Euclide étendu), nombres premiers entre eux, lemme d'Euclide, lemme de Gauss. Équations diophantiennes $ax + by = c$. Décomposition en produit de nombres premiers. Application : pour $n \in \mathbf{N}$, \sqrt{n} est soit un entier soit irrationnel.
- Arithmétique modulaire (congruences). Petit théorème de Fermat. Théorème chinois des restes.



- Étude de $\mathbf{Z/nZ}$, vu comme anneau. Inversibles, $\mathbf{Z/nZ}$ est un corps si et seulement si n est premier. Réinterprétation du théorème de Bézout. Réinterprétation du petit théorème de Fermat (définition de l'indicatrice d'Euler, théorème d'Euler). Réinterprétation du théorème chinois des restes.
- Illustration par la cryptographie.

Heures d'enseignement

Arithmétique et dénombrement - CM	Cours Magistral	30h
Arithmétique et dénombrement - TD	Travaux Dirigés	30h

Pré-requis obligatoires

Programme de mathématiques du S1 (principalement Raisonnement et théorie des ensembles) et programmes de mathématiques du lycée (a minima spécialité mathématiques de première)

Pré-requis recommandés :

Programme de mathématiques du S1 (principalement Raisonnement et théorie des ensembles) et programmes de mathématiques du lycée (idéalement spécialité mathématiques de terminale, voire option mathématiques expertes.)

Informations complémentaires

Volumes horaires* :

CM : 30 h

TD : 30 h

TP : 0

Terrain : 0

Infos pratiques



Contacts

Responsable pédagogique

Simon MODESTE

☎ 04 67 14 35 80

✉ simon.modeste@umontpellier.fr