



Algèbre IV Espaces euclidiens



Présentation

Description

Ce cours est une introduction à l'algèbre bilinéaire et abordera les espaces euclidiens, hermitiens. Il traitera tout ce qui est isométries, dualité, formes quadratiques et endomorphismes.

Objectifs

Espaces euclidiens:

produit scalaire, Cauchy-Schwarz, norme et distance euclidienne, inégalité triangulaire, égalité du parallélogramme, théorème de Pythagore. Base orthonormale.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Angles de vecteurs, angles de droites, théorème de l'angle au centre et cocyclicité. Sous-espaces orthogonaux.

Déterminant dans une base orthonormale et volume. Orientation.

Projections orthogonales (application à la méthode des moindres carrés).

Isométries linéaires, matrices orthogonales, groupe orthogonal et spécial orthogonal. Exemples d'isométries: rotations, symétries. Classification des isométries en dimension 2 et 3.

Isométries préservant un polygone régulier du plan

Dualité.

Définition du dual et du bidual. Orthogonal d'un sous-espace (au sens de la dualité), base duale, base antéduale. Correspondance hyperplans/formes linéaires, dualité entre description paramétrique et description cartésienne d'un sous-espace. Adjoint d'un endomorphisme. Ecriture matricielle, lien avec la transposée.

Formes bilinéaires symétriques sur un R -e.v.

Matrice d'une forme bilinéaire. Forme bilinéaire comme applications linéaire entre l'espace et son dual. Noyau et rang d'une forme bilinéaire. Vecteurs isotropes. Forme quadratique. Existence de bases orthogonales. Algorithme de réduction de Gauss. Théorie d'inertie de Sylvester, signature d'une forme quadratique. Classification des formes quadratiques réelles.

Interprétation de la dualité dans un espace euclidien. Endomorphismes symétriques et orthogonaux dans un espace euclidien. Lien avec l'adjoint. Forme quadratique associée. Diagonalisation des matrices symétriques dans une base orthonormale. Diagonalisation simultanée de deux formes symétriques dont l'une est définie positive.

Formes sesquilinéaires hermitiennes et espaces hermitiens.

Reprise des notions vues dans le cas réel: définition, matrice, forme quadratique hermitienne, signature et théorème d'inertie de Sylvester dans ce cadre. Espaces hermitiens, définitions, similarités et différences avec les espaces euclidiens, groupe unitaire, endomorphismes autoadjoints. Notion de complexification et de formes réelles.



Endomorphismes normaux:

réduction, avec applications aux matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales, unitaires, autoadjointes.

Heures d'enseignement

Algèbre IV Espaces euclidiens - CM	Cours Magistral	30h
Algèbre IV Espaces euclidiens - TD	Travaux Dirigés	30h

Pré-requis nécessaires

L'algèbre linéaire de L1 (HAX102X et HAX202X)

et HAX301X: Algèbre III Réduction des endomorphismes

Pré-requis recommandés : L1 maths

Informations complémentaires

Volumes horaires :

CM : 30

TD : 30

TP :

Terrain :

Infos pratiques

Contacts

Responsable pédagogique

Vanessa LLERAS

✉ vanessa.lleras@umontpellier.fr